26. Hausübung zu den Rechenmethoden der Physik SS 2000

Abgabe am 19. 6. 2000 vor der Vorlesung

76. Diffusionsgleichung

Die zeitliche Entwicklung eines Skalarfeldes $f(\vec{r}, t)$, das der Diffusionsgleichung $(\partial_t - D\Delta)f(\vec{r}, t) = 0$ genügt, ist formal durch $f(\vec{r}, t) = e^{tD\Delta} f(\vec{r}, 0)$ gegeben, wobei $t > 0$.

(a) Welche Gleichung für $\tilde{f}(\vec{k}, t)$ resultiert aus dieser formalen Lösung durch Fouriertransformation bezüglich $\vec{r}$?

(b) Wenn Sie die erhaltene Beziehung zurücktransformieren und im Resultat $\tilde{f}(\vec{k}, 0)$ wieder durch $f(\vec{r}, 0)$ ausdrücken, erhalten Sie eine Gleichung der Gestalt $f(\vec{r}, t) = \int d^3r' \, K(\vec{r} - \vec{r}\,', t) \, f(\vec{r}\,', 0)$. Berechnen Sie den Kern $K(\vec{r} - \vec{r}\,', t)$. *Tipp*: In kartesischen Koordinaten faktorisiert das k-Integral in ein Produkt von drei Gauß-Integralen.

(c) Skizzieren Sie die Verteilung $f(\vec{r}, t)$ für den Anfangswert $f(\vec{r}, 0) = \delta(\vec{r} - \vec{a})$. (4)

77. Abgeschirmtes Coulomb Potential

Eine positive Punktladung q wird in einem unendlich ausgedehnten Metall am Ursprung hinzugefügt: $\rho_p = q\delta(\vec{r})$. Dadurch verschieben sich die Elektronen des Metalls gegen die Atomrümpfe, so dass zusätzlich eine ortsabhängige Ladungsdichte ρ_e entsteht, die das Potential ϕ verändert: $-\Delta\phi = 4\pi(\rho_e + \rho_p)$. Die Ladungsdichte ρ_e stellt sich dabei ihrerseits so ein, dass sie proportional zum Potential ist: $4\pi\rho_e = -\lambda^2\phi$. Welche selbstkonsistente Gleichung ergibt sich für das Potential? Lösen Sie diese durch Fouriertransformation. Führen Sie in dem resultierenden k-Integral die Winkelintegrationen durch und verwenden Sie anschließend die Identität $\int_0^\infty dx \, \frac{x \sin(bx)}{a^2 + x^2} = \frac{\pi}{2} \mathrm{sign}(b) e^{-|ab|}$. (4)

Zur Interpretation: Die zusätzliche Ladung kann man sich aus dem Unendlichen kommend denken.

78. Lösung einer Differentialgleichung mit Fouriertransformation

Ein Teilchen bewege sich unter dem Einfluss des Potentials $V(x) = -\frac{1}{2}\lambda^2 x^2$ (Skizze!). Zusätzlich wirke in dem Zeitraum $0 \le t \le 1$ eine konstante äußere Kraft f auf das Teilchen ein. Damit nimmt die Bewegungsgleichung die Form $\ddot{x} - \lambda^2 x = F(t)$ an, wobei

$$F(t) = \begin{cases} f & 0 \le t \le 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Geben Sie die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung an.

(b) Eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung soll mit Hilfe der Greensfunktion $G(t)$, die sich als Lösung von $\ddot{G} - \lambda^2 G = \delta(t)$ berechnet, konstruiert werden. Welche Gleichung erhalten Sie für $\tilde{G}(\omega)$ durch Fouriertransformation der Differentialgleichung für $G(t)$? Führen Sie die Rücktransformation unter Benutzung von $\int_{-\infty}^{+\infty} dk \, \frac{e^{-ikx}}{k^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} e^{-|ax|}$ durch. Eine spezielle Lösung $x_s(t)$ erhalten nun Sie gemäß $x_s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \, G(t - t')F(t')$. Durch welche Randbedingungen $x_s(t \to \pm\infty)$ ist diese Lösung ausgezeichnet? Skizze!

(c) Finden Sie die konkrete Lösung mit $x(0) = -x_0$ und $\dot{x}(0) = 0$, indem Sie diese Anfangsbedingungen in die allgemeine Lösung einarbeiten. Welchem Schicksal geht das Teilchen für $t \to \infty$ entgegen und welche Kraft f ist mindestens aufzuwenden, um das Teilchen über den Berg zu stoßen? (4)